

Molet ve

Molet Saplamaları

MUKAVEMET Hesabı

(inceleme)

-VI-

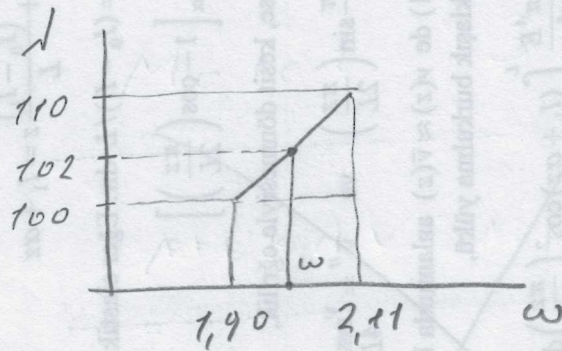
[Signature]

$$\| d_y \approx 27$$

Burkulma formu :

$$d_{max} = \max(d_x, d_y) = 102 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} d = 100 &\rightarrow \omega = 1,90 \\ d = 110 &\rightarrow \omega = 2,11 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Tablo 5} \end{array} \right.$$



$$\frac{\omega - 1,90}{2,11 - 1,90} = \frac{102 - 100}{110 - 100}$$

$$\omega - 1,90 = 0,042$$

$$\| \omega_{102} \approx 1,94$$

bulunur. Kolunun güvence taşıyabilirliği:

en büyük basınç gerilmesi,

$$\sigma_{max} = \frac{\omega \cdot F}{A} \quad (\text{Eşitlik 57})$$

$$\sigma_{max} = \frac{1,94 \cdot (800.000 \text{ N})}{(117,7 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2)} \cdot 10^{-6}$$

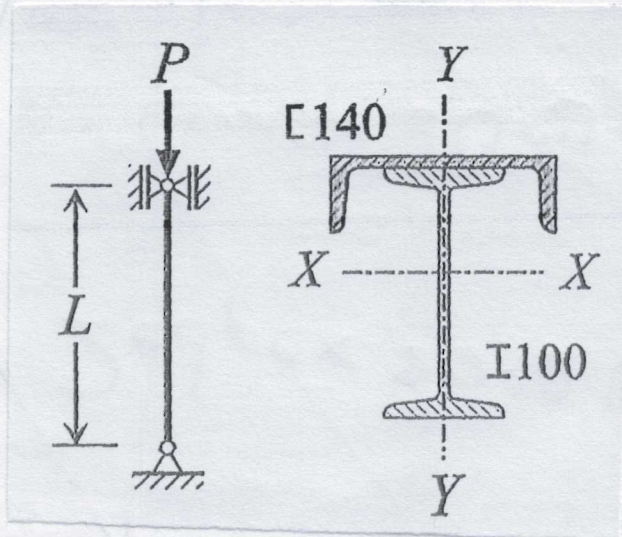
$$\| \sigma_{max} = 132 \text{ MPa}$$

$$\| \sigma_{max} (= 132 \text{ MPa}) < \sigma_{em} (= 140 \text{ MPa})$$

Kesit yeterlidir.

Örnek 13 [L10] :

Şekil 28 de görüldüğü gibi parçaları sürekli bitişik iki parçalı ([140 ve I100) ve iki ucu mafsallı basınç çubuğu St 37 çelikten yapılmıştır. Kolon boyu $L=3m$ ve emniyet gerilmesi $\sigma_{em} = 140 \text{ MPa}$ ise, kolonun püvenle taşıyabileceği en büyük basınç kuvvetini burkulma çarpma yöntemiyle bulunur.

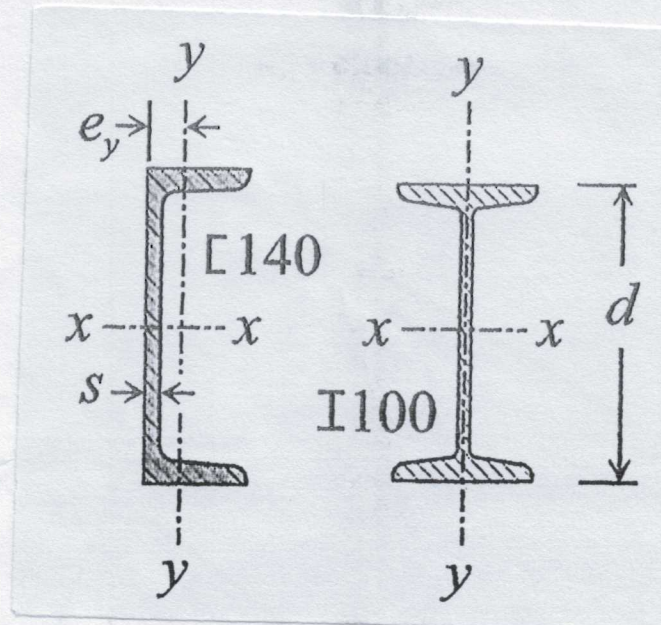


Şekil 28- iki parçalı ve iki ucu mafsallı basınç çubuğu [L10].

Kullanılan profillerin özellikleri (Şekil 28a),

$$\begin{array}{l}
 \text{[140 : } A_c = 20,4 \text{ cm}^2 \\
 I_{xc} = 605 \text{ cm}^4 \\
 I_{yc} = 62,7 \text{ cm}^4 \\
 e_y = 1,75 \text{ cm} \\
 s = 0,7 \text{ cm}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} A_c \\ I_{xc} \\ I_{yc} \\ e_y \\ s \end{array}} \right\} \text{(Tablo 1)}$$

125 N13



Şekil 28a - Kesit büyüklükleri
[L 10]

$$I 100 : \left. \begin{array}{l} A_I = 10,6 \text{ cm}^2 \\ I_{xI} = 171 \text{ cm}^4 \\ I_{yI} = 12,2 \text{ cm}^4 \end{array} \right\} [L 10]$$

Kesit alanı,

$$A = A_C + A_I = 20,4 + 10,6$$

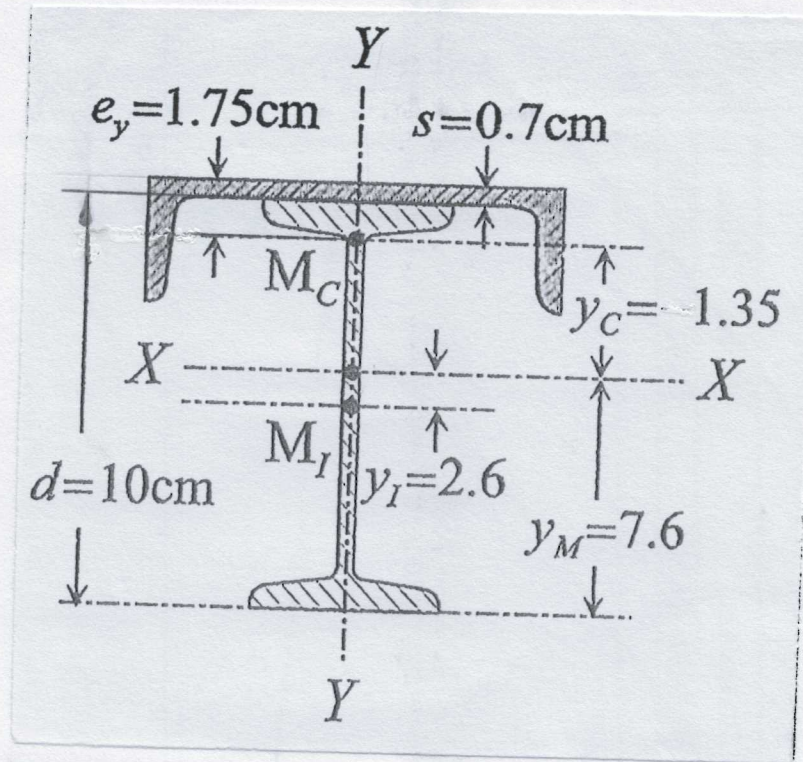
$$\parallel A = 31 \text{ cm}^2$$

Ağırlık merkezi, eylemsizlik momentleri (Şekil 28b),

$$y_M = \frac{\sum_{i=1}^n y_{Mi} \cdot A_i}{A} \quad (\text{Eşitlik 11})$$

$$y_M = \frac{y_{MI} \cdot A_I + y_{MC} \cdot A_C}{A}$$

$$y_M = \frac{\frac{d}{2} \cdot A_I + (d + s - e_y) \cdot A_C}{A}$$



Şekil 28b - Alan ağırlık merkezi [L10]

$$y_M = \frac{5 \cdot 10,6 + (10 + 0,7 - 1,75) \cdot 20,4}{31}$$

$$(y_M = 7,6 \text{ cm})$$

$$y_I = y_M - \frac{d}{2} = 7,6 - 5$$

$$y_I = 2,6 \text{ cm}$$

$$y_C = d + s - e_y - y_M = 10 + 0,7 - 1,75 - 7,6$$

$$y_C = 1,35 \text{ cm}$$

$$I_X = (I_{XI} + A_I \cdot y_I^2) + (I_{YC} + A_C \cdot y_C^2) \quad (\text{Eşitlik 13})$$

$$I_X = 171 + 10,6 \cdot 2,6^2 + 62,7 + 20,4 \cdot 1,35^2$$

$$\underline{I_x = 342,5 \text{ cm}^4}$$

$$I_y = I_{yI} + I_{xC}$$

$$I_y = 12,2 + 605$$

$$\underline{I_y = 617,2 \text{ cm}^4}$$

Eylemsizlik yarıçapları;

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{A}} \quad (\text{Eşitlik 12})$$

$$i_x = \sqrt{\frac{342,5}{31}} = 3,32 \text{ cm}$$

$$i_y = \sqrt{\frac{I_y}{A}} \quad (\text{Eşitlik 12})$$

$$i_y = \sqrt{\frac{617,2}{31}} = 4,46 \text{ cm}$$

Navinlik dereceleri;

$$\lambda = \frac{L_{kr}}{i} \quad (\text{Eşitlik 52})$$

iki ucu mafsallı kolonda

$$L_{kr} = L \quad (\text{Şekil 17; Tablo 2})$$

$$\lambda_x = \frac{L_{kr}}{i_x} = \frac{300}{3,32} \approx 91$$

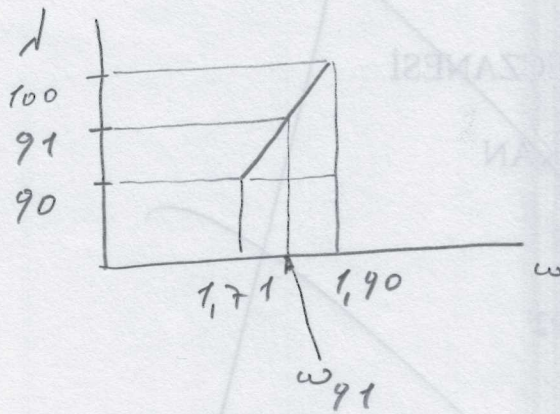
$$\lambda_y = \frac{L_{kr}}{i_y} = \frac{300}{4,46} = 67,5$$

En büyük varinlik derecesi

- 106 -

$$d_{max} = \max(d_x, d_y)$$

$$d_{max} = d_x = 91$$



$$\frac{w_{91} - 1,71}{1,90 - 1,71} = \frac{91 - 90}{100 - 90}$$

(Tablo 5 değerleri)

$$w_{91} - 1,71 = 0,019$$

$$w_{91} = 1,73$$

Şu hâlde şu buğun taşıyabileceği en büyük basınç kuvveti

$$F_{max} = A \cdot \frac{\sigma_{em}}{w} \quad (\text{Eşitlik 57})$$

$$\sigma_{em} = 140 \text{ MPa} = 140 \cdot 10^6 \text{ Pa} = 140 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$$

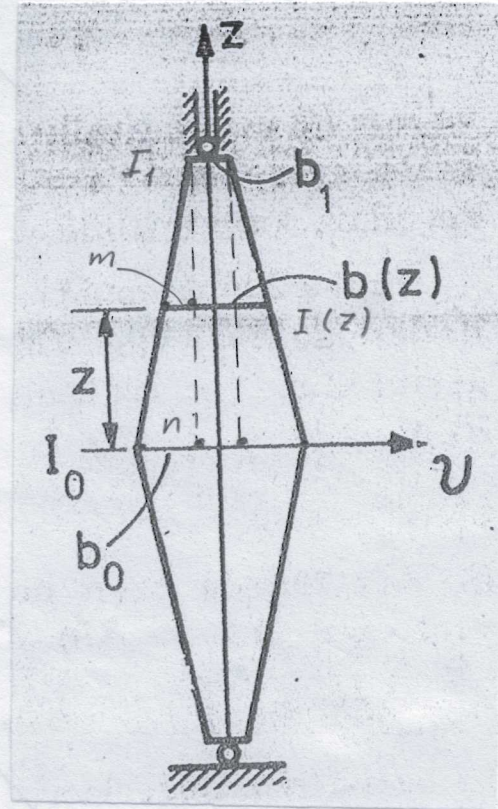
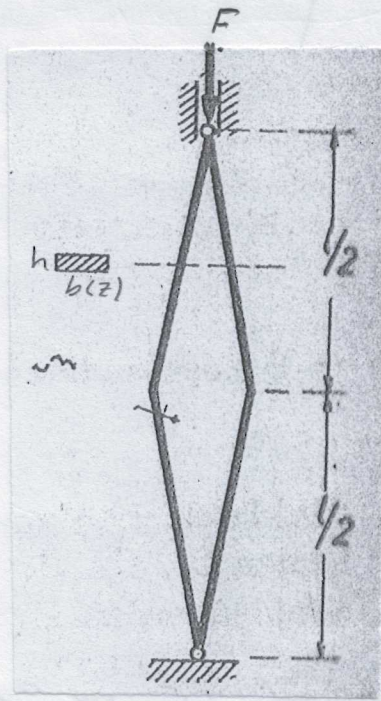
$$F_{max} = 31 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \frac{140 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2}{1,73}$$

$$\parallel F_{max} = 251 \cdot 10^3 \text{ N}$$

olur.

Örnek 14 [L12; L13] :

Şekil 29'deki değişken genişlikli dikdörtgen kesitli çubukta kritik yükü bulunuz. (Kesiir teorisi)



Şekil 29 - Değişken genişlikli dikdörtgen kesitli çubuk [L13]

Kesitin genişliği şekilde görüldüğü gibi z ile doğrusal değişen kolundu herhangibir z kesitindeki $b(z)$ genişliği,

$$\frac{m}{n} = \frac{\frac{L}{2} - z}{\frac{L}{2}}$$

$$\frac{m}{n} = 1 - \frac{2z}{L}$$

$$m = n \left(1 - \frac{2z}{L} \right)$$

126 meş

diğer taraftan,

$$2n = b_0 - b_1$$

$$2m = b(z) - b_1$$

$$m = \frac{b(z) - b_1}{2}$$

$$\frac{b(z) - b_1}{2} = \frac{b_0 - b_1}{2} \left(1 - \frac{z^2}{L}\right)$$

$$b(z) = b_1 + 2n \left(1 - \frac{z^2}{L}\right)$$

z kesitindeki eylemsizlik momenti,

$$I(z) = \frac{b(z) \cdot h^3}{12}$$

$$I(z) = \frac{h^3}{12} \left[b_1 + 2n \left(1 - \frac{z^2}{L}\right) \right]$$

$$I(z) = \underbrace{\frac{h^3 b_1}{12}}_{I_1} \left[1 + \frac{2n}{b_1} \left(1 - \frac{z^2}{L}\right) \right]$$

$$I(z) = I_1 \left[1 + \frac{(b_0 - b_1)}{b_1} \left(1 - \frac{z^2}{L}\right) \right]$$

$$I(z) = I_1 \left[1 + \left(\frac{b_0}{b_1} - 1 \right) \left(1 - \frac{z^2}{L}\right) \right]$$

$$\frac{b_0}{b_1} = \gamma$$

ile

$$I(z) = I_1 \left[1 + (\gamma - 1) \left(1 - \frac{z^2}{L}\right) \right]$$

$$I(z) = I_1 \left[\gamma - \frac{z^2}{L} \gamma + \frac{z^2}{L} \right]$$

30/12/18

10/1/19

$$I(z) = I_1 \left[\gamma - \frac{2z}{L} (\gamma - 1) \right]$$

$$\alpha = \frac{2(\gamma - 1)}{L}$$

$$\| I(z) = I_1 (\gamma - \alpha \cdot z)$$

elde edilir. Burada,

$$\alpha = \frac{2}{L} (\gamma - 1) = \frac{2}{L} \left(\frac{b_0}{b_1} - 1 \right)$$

$$\alpha = \frac{2}{L} \left(\frac{b_0 - b_1}{b_1} \right)$$

$$\alpha = \frac{4 \cdot n}{b_1 \cdot L}$$

yarılabilir.

Herhangi bir kesitteki eğilme momenti:

$$M_z = F \cdot v$$

olduğu düşünülür ve elastik eğrilme

$$M_z = -EI(z) \frac{d^2 v}{dz^2}$$

bağıntısında yerine konursa elastik eğriye

ait diferansiyel denklem

$$F \cdot v = -EI(z) \frac{d^2 v}{dz^2}$$

ve buradan,

$$F \cdot v = -EI_1 (\gamma - \alpha \cdot z) \frac{d^2 v}{dz^2}$$

doğru
doğru
fawaz

Toplam doğru fawaz

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \frac{F}{EI_1} \frac{1}{\gamma - \alpha z} v = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma - \alpha z &= \xi \\ \frac{F}{EI} &= \beta^2 \end{aligned} \right\}$$

tanımları ile

$$v'' + \frac{\beta^2}{\xi} v = 0$$

sonucu elde edilir. Görüldüğü gibi bu bir Bessel diferansiyel denklemdir.

Esin hocam [L13], uzun hesaplar yerine yalnızca sonuçları vermiştir.

$$F_{kr} = k \cdot \frac{EI_0}{L^2}$$

ifadesinden k değerleri I_1/I_0 oranına bağlı olarak

I_1/I_0	0,1	0,2	0,4	0,6	0,8
k	6,48	7,01	7,87	8,61	9,27

şeklinde bulunur.

İrdeleme.

Örnek 11 ile Örnek 14 aynı olup çözüm şekilleri farklıdır.

Örnek 11 de, RAYLEIGH metodu - 111.

Örnek 14 de, BESSEL diferansiyel denklemi:
çözümü kullanılmıştır.

$$(F_{kr})_{\text{RAYLEIGH}} = \frac{\pi^2 E}{L^2} (0,3 I_0 + 0,7 I_1)$$

(Sayfa: 96)

$$(F_{kr})_{\text{RAY.}} = \frac{\pi^2 E}{L^2} I_1 \left(0,3 \frac{I_0}{I_1} + 0,7 \right)$$

$$\frac{I_0}{I_1} = 0,1 \quad i \sin,$$

$$(F_{kr})_{\text{RAY.}} = 7,2 \frac{E I_1}{L^2}$$

$$\frac{I_0}{I_1} = 0,2 \quad i \sin,$$

$$(F_{kr})_{\text{RAY.}} = 7,5 \frac{E I_1}{L^2}$$

$$\frac{I_0}{I_1} = 0,4 \quad i \sin$$

$$(F_{kr})_{\text{RAY.}} = 8 \frac{E I_1}{L^2}$$

$$\frac{I_0}{I_1} = 0,6 \quad i \sin,$$

$$(F_{kr})_{\text{RAY.}} = 8,68 \frac{E I_1}{L^2}$$

$$\frac{I_0}{I_1} = 0,8 \text{ iken,}$$

$$(F_{kr})_{RAY} = 9,22 \frac{EI_1}{L^2}$$

elde edilir. Sonuçlar, BESSEL diferansiyel denklemini çözümü ile elde edilen değerlere çok yakındır.

Not. Faydalı olur düşüncesiyle, BESSEL diferansiyel denklemini ve fonksiyonları hakkında kısa bir bilgi verelim.

p. mertebeden Bessel diferansiyel denklemini [L 15] ;

$$z^2 \frac{d^2 w}{dz^2} + z \frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0 \quad (67)$$

şeklinde olup,

$$\left. \begin{aligned} w &= x^{-\alpha} y \\ z &= k \cdot x^{\beta} \end{aligned} \right\}$$

dönüşümleri ile,

$$x^2 y'' + (1 - 2\alpha) x y' + (\alpha^2 - \beta^2 p^2 + \beta^2 k^2 x^{2\beta}) y = 0 \quad (68)$$

şekline gelir,

$$x^2 y'' + A x y' + (B + C x^9) y = 0 \quad (69)$$

biçimine dönüşür. Burada A, B, C ve

q sabitleri

$$\left. \begin{aligned} A &= 1 - 2\alpha \\ B &= \alpha^2 - \beta^2 p^2 \\ C &= \beta^2 k^2 \\ q &= 2\beta \end{aligned} \right\} \quad (70)$$

ile verilir. Yukarıdaki denklemleri

$$\alpha = \frac{1-A}{2}$$

$$\beta = \frac{q}{2}$$

$$C = \beta^2 k^2 \rightarrow k = \frac{\sqrt{C}}{\beta} = \frac{2\sqrt{C}}{q}$$

$$B = \alpha^2 - \beta^2 p^2 = \frac{(1-A)^2}{4} - \frac{q^2}{4} p^2$$

$$p = \frac{\sqrt{(1-A)^2 - 4B}}{q}$$

olarak sözebiliriz,

Kareköklerin reel oldukları varsını,

ile Eşitlik 69'un genel çözümünün

$$y(x) = x^\alpha \omega(z) = x^\alpha \omega(kx^\beta)$$

olduğu çıkar. Burada

$$\omega(z) = C_1 \tilde{Y}_p(z) + C_2 Y_{-p}(z)$$

15/12/18

ifadesi (p bir tam sayı olmamak üzere) -114-

Eşitlik 67'deki Bessel diferansiyel denkleminin genel çözümüdür. Bu aşağıdaki sonucu verir;

Bessel fonksiyonları, cinsinden formler:

Eğer $C > 0$, $\eta \neq 0$ ve $(1-A)^2 \geq 4B$ ise

bu taktirde Eşitlik 69'un $(x > 0)$ için

genel çözümü, α, β, k ve p ler verilen

ler olmak üzere

$$y(x) = x^\alpha [C_1 J_p(kx^\beta) + C_2 Y_p(kx^\beta)] \quad (71)$$

dir. Eğer p bir tam sayı ise J_p yi Y_p

ile yer değiştirerek seçer.

J_p - Birinci tip Bessel fonksiyonu

Y_p - ikinci tip Bessel fonksiyonu.

Gözlem: denklemler:

$$4x^2 y'' + 8xy' + (x^4 - 3)y = 0$$

denklemini çözüyoruz [L 75].

Verilen denklem,

$$x^2 y'' + 2xy' + \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{4}x^4\right)y = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Bu denklemi,

-115-

$$x^2 y'' + A x y' + (B + C x^q) y = 0 \quad (\text{Eşitlik 69})$$

ile karşılaştırarak,

$$\left. \begin{aligned} A &= 2 \\ B &= -\frac{3}{4} \\ C &= \frac{1}{4} \\ q &= 4 \end{aligned} \right\} \text{olduğu görülür.}$$

Eşitlik 70 kullanılırsa,

$$A = 1 - 2\alpha \rightarrow 2 = 1 - 2\alpha \rightarrow \underline{\alpha = -\frac{1}{2}}$$

$$q = 2\beta \rightarrow 4 = 2\beta \rightarrow \underline{\beta = 2}$$

$$C = \beta^2 k^2 \rightarrow \frac{1}{4} = 4k^2 \rightarrow \underline{k = \frac{1}{4}}$$

$$B = \alpha^2 - \beta^2 p^2 \rightarrow -\frac{3}{4} = \frac{1}{4} - 4p^2 \rightarrow \underline{p = \frac{1}{2}}$$

dolayısıyla,

$$y(x) = x^\alpha \left[C_1 j_p(kx^\beta) + C_2 j_{-p}(kx^\beta) \right] \quad (\text{Eşitlik 71})$$

$$y(x) = x^{-1/2} \left[C_1 j_{1/2}\left(\frac{1}{4}x^2\right) + C_2 j_{-1/2}\left(\frac{1}{4}x^2\right) \right]$$

olur.

Eğer, p basamaklı tek bir tamsayının

yarısı ise $j_p(x)$,

$$\left. \begin{aligned} j_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x \\ j_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x \end{aligned} \right\} \quad (72)$$

şeklinde yazılabilir.

$$j_{1/2}\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \frac{1}{4}x^2}} \sin \frac{x^2}{4} = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot x} \sin \frac{x^2}{4}$$

$$j_{-1/2}\left(\frac{1}{4}x^2\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \frac{1}{4}x^2}} \cos \frac{x^2}{4} = \frac{2}{\sqrt{\pi} \cdot x} \cos \frac{x^2}{4}$$

$$y(x) = \frac{x^{-1/2}}{x} \left[C_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin \frac{x^2}{4} + C_2 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cos \frac{x^2}{4} \right]$$

$$\| \quad y(x) = x^{-\frac{3}{2}} \left[A \sin \frac{x^2}{4} + B \cos \frac{x^2}{4} \right]$$

bulunur.

$$\bullet \quad y'' + 9xy = 0$$

denklemini çözüyoruz [L15].

Verilen denklemi,

$$x^2 y'' + 9x^3 y = 0$$

şeklinde yazalım. Eşitlik 69'a göre,

$$\left. \begin{aligned} A &= 0 \\ B &= 0 \\ C &= 9 \\ q &= 3 \end{aligned} \right\} \text{ dir.}$$

Esitlik 70 den faydalanarak,

- 117.

$$A = 1 - 2\alpha \rightarrow 0 = 1 - 2\alpha \rightarrow \underline{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$q = 2\beta \rightarrow 3 = 2\beta \rightarrow \underline{\beta = \frac{3}{2}}$$

$$C = \beta^2 k^2 \rightarrow 9 = \frac{9}{4} k^2 \rightarrow \underline{k = 2}$$

$$B = \alpha^2 - \beta^2 p^2 \rightarrow 0 = \frac{1}{4} - \frac{9}{4} p^2 \rightarrow \underline{p = \frac{1}{3}}$$

bulunur.

Esitlik 71'e göre,

$$\underline{y(x) = x^{1/2} \left[C_1 J_{1/3}(2x^{3/2}) + C_2 J_{-1/3}(2x^{3/2}) \right]}$$

olur.

$$\bullet \quad x y'' - 3y' + x y = 0$$

diferansiyel denklemini Bessel fonksiyon

ları türünden çözümler [L76].

Yukarıda verilen örneklerdeki çözüm yolunu takip ederseniz,

$$x^2 y'' - 3x y' + x^2 y = 0$$

$$A = -3$$

$$B = 0$$

$$C = 1$$

$$q = 2$$

Bobas Boz

$$A = 1 - 2\alpha \rightarrow -3 = 1 - 2\alpha \rightarrow \underline{\alpha = 2}$$

$$q = 2\beta \rightarrow 2 = 2\beta \rightarrow \underline{\beta = 1}$$

$$C = \beta^2 k^2 \rightarrow 1 = 1 \cdot k^2 \rightarrow \underline{k = 1}$$

$$B = \alpha^2 - \beta^2 p^2 \rightarrow 0 = 4 - 1 \cdot p^2 \rightarrow \underline{p = 2}$$

p tam sayı dolayısıyla

$$j_p = Y_p \text{ yazılır (Sayfa : 114)}$$

$$y(x) = x^\alpha [C_1 j_p(kx^\beta) + C_2 Y_p(kx^\beta)]$$

$$\underline{y(x) = x^2 [C_1 j_2(x) + C_2 Y_2(x)]}$$

bulunur.

$$\bullet \quad x^4 y'' + \alpha^2 y = 0 \quad (\alpha = \text{sabit})$$

diferansiyel denklemini, elementer fonksiyonlar türünden genel çözümünü yazınız [116].

Aynı çözüm yöntemini uygulayalım.

$$x^2 y'' + \frac{\alpha^2}{x^2} y = 0$$

$$A = 0$$

$$B = 0$$

$$C \cdot x^q = \frac{\alpha^2}{x^2} \rightarrow \underline{C = \alpha^2} \quad \underline{q = -2}$$

$$A = 1 - 2\alpha \rightarrow 0 = 1 - 2\alpha \rightarrow \underline{\alpha = \frac{1}{2}}$$

$$q = 2\beta \rightarrow -2 = 2\beta \rightarrow \underline{\beta = -1}$$

$$C = \beta^2 k^2 \rightarrow \alpha^2 = 1 \cdot k^2 \rightarrow \underline{k = \alpha}$$

$$B = \alpha^2 - \beta^2 p^2 \rightarrow 0 = \frac{1}{4} - p^2 \rightarrow \underline{p = \frac{1}{2}}$$

$$p = \frac{1}{2} \text{ dolayısıyla}$$

$$\left. \begin{aligned} j_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \sin x \\ j_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \cos x \end{aligned} \right\} \text{ (Esratik 72)}$$

olduğuna göre,

$$y(x) = x^\alpha [C_1 j_p(kx^\beta) + C_2 j_{-p}(kx^\beta)]$$

$$j_{1/2}(\alpha \bar{x}^{-1}) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \alpha \bar{x}^{-1}}} \sin \alpha \bar{x}^{-1}$$

$$j_{1/2}(\alpha \bar{x}') = x^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \alpha}} \sin \frac{\alpha}{x}$$

$$j_{-1/2}(\alpha \bar{x}') = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \alpha \cdot \bar{x}^{-1}}} \cdot \cos \alpha \bar{x}^{-1}$$

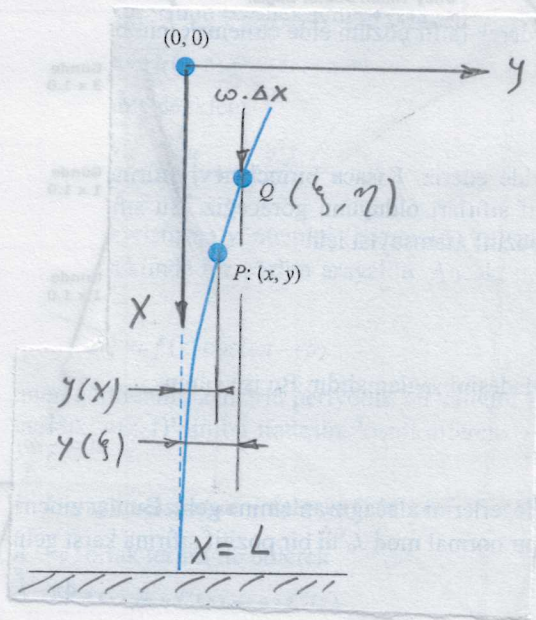
$$j_{-1/2}(\alpha \bar{x}') = x^{1/2} \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \alpha}} \cos \frac{\alpha}{x}$$

$$y(x) = X^{1/2} \cdot X^{1/2} \left[C_1 \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} \sin \frac{\alpha}{X} + C_2 \sqrt{\frac{2}{\pi \alpha}} \cos \frac{\alpha}{X} \right]$$

$$y(x) = X \left[A \sin \frac{\alpha}{X} + B \cos \frac{\alpha}{X} \right]$$

bulunur.

6- Bir çubuğun kritik uzunluğu $[L_{17}]$;



Şekil 30 - Bir çubuğun

yer değiştirmesi $[L_{17}]$.

Uzunluğu L , yarıçapı d olan dairesel kesitli çubuğun göz önüne alalım.

ω - Çubuğun birim uzunluk başına ağırlığı olsun.

Çubuğun bir ucu ankastre diğer ucu serbesttir. Çubuk yeteri kadar uzun ise ve üst uç nokta çubuk hareketsiz hale gelinceye kadar yer değiştirecek olursa, çubuk eğri bir hal alır.